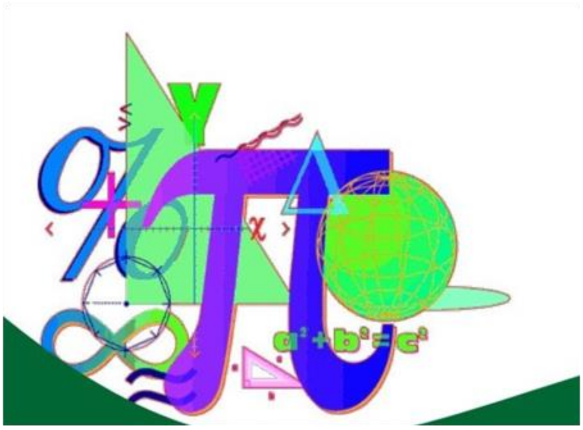
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



Методические рекомендации по оформлению и проверке письменных работ по алгебре и началам анализа на итоговой аттестации выпускников школ

Астана 2017

Предисловие

Это методическое пособие предназначено для подготовки к итоговой аттестации за курс средней школы.

В нем представлены варианты экзаменационных заданий и образец оформления письменной экзаменационной работы по алгебре и началам анализа, а так же варианты для самостоятельной подготовки.

Все варианты содержат материал по алгебре и началам анализа, который изучается в 10-11 классах.

Каждый вариант содержит задания, проверяющие степень овладения учащимися вычислительными навыками, навыками тождественных преобразований основных типов алгебраических выражений, способами решения указанных в программе уравнений и неравенств.

Учащиеся должны показать умение строить графики функций и проводить исследование функции методами математического анализа, решать задачи на вычисление площади криволинейной трапеции, на нахождение наибольших и наименьших значений.

При составлении письменной экзаменационной работы по алгебре и началам анализа учитывается профиль обучения (ЕМН, ОГН, углубленное изучение математики (РФМШ)).

Согласно требованиям к математической подготовке выпускников, каждый вариант содержит разноуровневые задания.

Уровень А обязательной подготовки. Задания этого уровня достаточно просты и рассчитаны на выполнение каждым выпускником, освоившим программу. Задания продвинутого уровня В и сложного уровня С определяют более высокое качество усвоения выпускником алгебры и начал анализа.

а) Для классов ЕМН предложены 6 заданий.

б) Для классов ОГН - 5 заданий.

в) Для классов с углубленным изучением математики (РФМШ) - 6 заданий.

Требования к оформлению письменной экзаменационной работы

1) Образец оформления титульного листа

Письменная экзаменационная работа
по алгебре и началам анализа
за курс средней школы
ученика(цы) 11 класса«   »
Ф.И.О. (в родительном падеже).
Вариант   .

2) Экзаменационная работа выполняется на тетрадных листах со штампом школы. Название, номер школы, ее местоположение указаны на штампе. Здесь же указывается дата проведения экзамена. Листы складываются в виде тетради.

3) Условие задачи переписывается один раз. Специальная сокращенная запись условия не делается, это должно естественным образом войти в общее объяснение решения, после решения записывается ответ.

4) Рисунок выполняется ручкой, при построении графиков функций обязательно указываются точки пересечения с осями координат и критические точки функции.

5) В записи объяснений решения заданий следует избегать многословности, краткость и четкость должны сочетаться со строгостью рассуждений.

7) При решении также следует объяснять основные этапы и, если это необходимо, выполнять рисунки.

8) Работа должна быть выполнена аккуратно и разборчиво.

9) В конце решения должен быть обязательно ответ. В задачах на доказательство, исследование или построение – вывод.

10) Всякую новую мысль следует писать с красной строки.

11) Между номером задания, решением и ответом пропускается одна клетка вниз.

12) Недопустимо сокращение слов в рассуждениях.

13) На экзамене не разрешается пользоваться калькулятором, мобильным телефоном.

Оценивание письменной экзаменационной работы

При выполнении письменной работы могут встретиться:

- ошибки;
- недочеты;
- мелкие недочеты.

1) Ошибки:

- незнание или неправильное применение свойств, правил, алгоритмов, существующих зависимостей, лежащих в основе выполнения задания или используемых в ходе его выполнения;
- неправильный выбор действий, операций;
- неверные вычисления в случае, когда цель задания - проверка вычислительных умений и навыков;
- пропуск части математических выкладок, действий, операций, существенно влияющих на получение правильного ответа;
- несоответствие пояснительного текста, ответа задания, наименования величин выполненным действиям и полученным результатам;
- потеря корня или сохранение постороннего корня, а так же отбрасывание без объяснений одного из них;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;

логические ошибки.

2) Недочеты

- не указаны единицы измерения;
- в записи ответа использованы сократимые или неправильные дроби и в окончательном ответе не избавились от иррациональности в знаменателе;
- отсутствие обоснования решения;
- неправильное списывание данных (чисел, знаков, обозначений, величин);
- ошибки в записях математических терминов, символов при оформлении математических выкладок;
- отсутствие ответа к заданию.

3) Мелкие недочеты

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, рисунков, графиков, схем, диаграмм, таблиц, а также грамматические ошибки в написании математических терминов.

Оценка «5» ставится за безупречное выполнение всех заданий контрольной работы, допускается не более двух мелких недочетов.

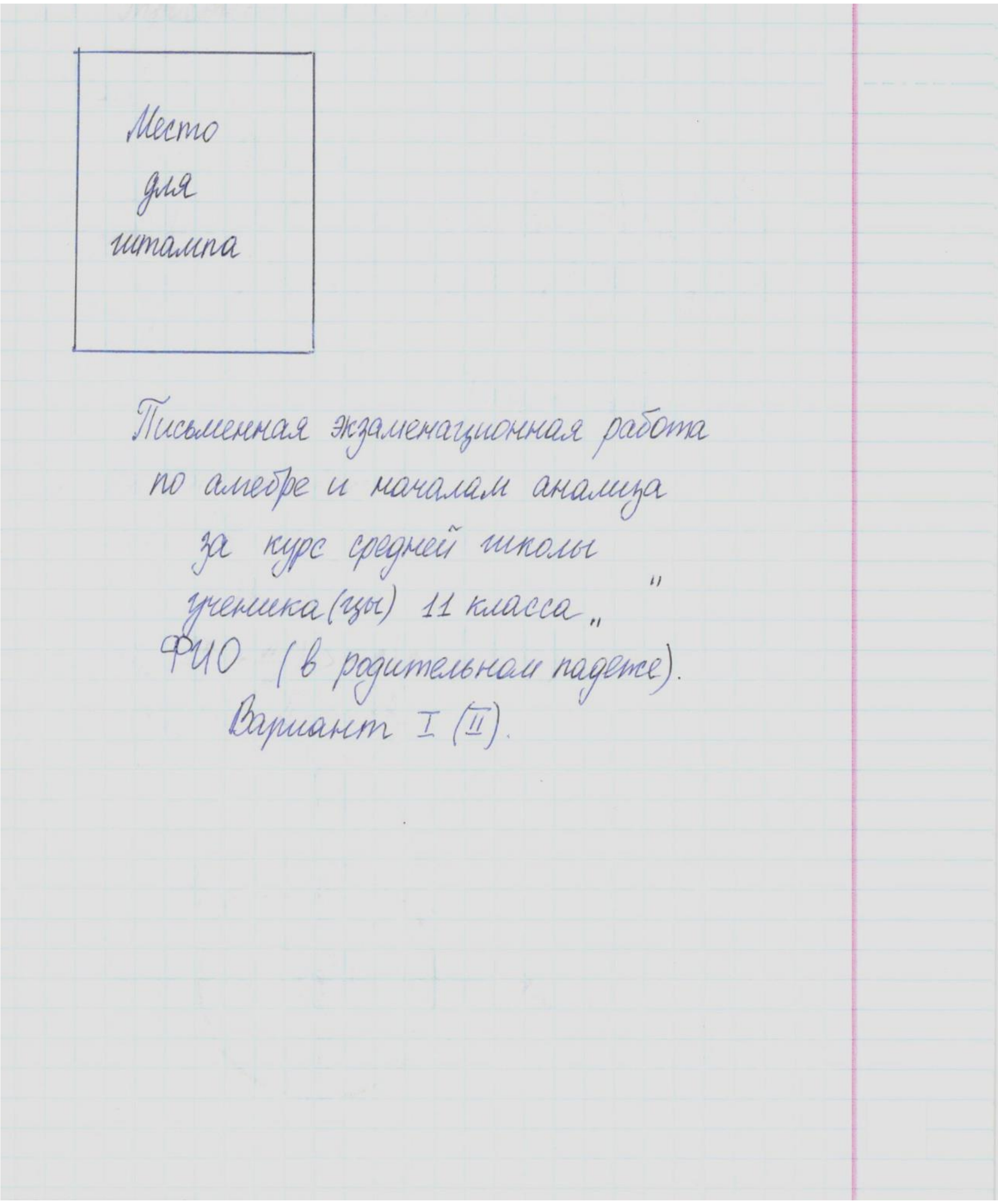
Оценка «4» ставится, если одно задание не выполнено или выполнено с ошибкой.

Оценка «3» ставится, если выполнено правильно не менее трёх заданий и учащийся показал владение обязательными знаниями и умениями.

Оценка «2» ставится, если не выполнено больше половины заданий и учащийся не показал владение обязательными знаниями и умениями.

На работы, выполненные на «5» и на «2», пишется рецензия.

Образец оформления экзаменационной контрольной работы



№1 Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}.$$

Решение:

$$\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}=\left(2a\cdot a^{-\frac{1}{4}}-\left(a\cdot a^{\frac{1}{4}}\right):a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\left(2a^{1-\frac{1}{4}}-a^{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}.$$

Ответ: $\sqrt[4]{a}$.

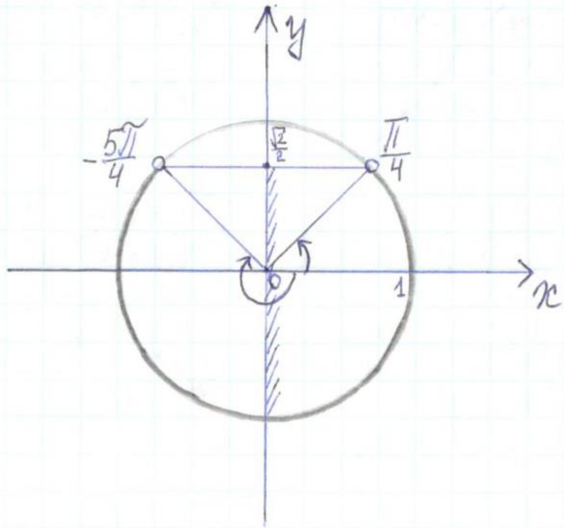
№2 Решите неравенство:

$$-4\sin\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)>-2\sqrt{2}$$

Решение:

$$-4\sin\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)>-2\sqrt{2}\quad\Big|\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$-\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n<\frac{3x}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$-\frac{3\pi}{2}+2\pi n<\frac{3x}{4}<2\pi n,\ n\in Z$$

$$-\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}+2\pi n\cdot\frac{4}{3}<x<2\pi n\cdot\frac{4}{3},\ n\in Z$$

$$-2\pi+\frac{8\pi n}{3}<x<\frac{8\pi n}{3},\ n\in Z$$

Ответ: $x\in\left(-2\pi+\frac{8\pi n}{3};\ \frac{8\pi n}{3}\right),\ n\in Z$

№3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\lg(x^2-y^2)-\lg(x+y)=0\\ 2^{2+\log_2(x^2+y^2)}=20\end{cases}.$$

Решение:

$$\begin{cases}\lg(x^2-y^2)-\lg(x+y)=0\\ 2^{2+\log_2(x^2+y^2)}=20\end{cases}.$$

ОДЗ: $\begin{cases}x^2-y^2>0\\ x+y>0\\ x^2+y^2>0\end{cases};\quad \begin{cases}(x-y)(x+y)>0\\ x+y>0\\ x^2+y^2>0\end{cases};\quad \begin{cases}x-y>0\\ x+y>0\\ x^2+y^2>0.\end{cases}$

$$\begin{cases}\lg(x^2-y^2)-\lg(x+y)=0\\ 2^{2+\log_2(x^2+y^2)}=20\end{cases};\quad \begin{cases}\lg(x^2-y^2)=\lg(x+y)\\ 2^2\cdot 2^{\log_2(x^2+y^2)}=20\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=x+y\\ 4\cdot 2^{\log_2(x^2+y^2)}=20\end{cases};\quad \begin{cases}(x-y)(x+y)=x+y\\ 2^{\log_2(x^2+y^2)}=5\end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 + y & (1) \\ (1+y)^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2) системы:

$(1+y)^2 + y^2 = 5$

$1 + 2y + y^2 + y^2 = 5$

$2y^2 + 2y - 4 = 0$

$y^2 + y - 2 = 0$

По теореме, обратной теореме Виета.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \cdot y_2 = -2 \end{cases} \qquad y_1 = -2,\ y_2 = 1$$

если $y_1 = -2$, то $x_1 = 1 + (-2) = -1$

если $y_2 = 1$, то $x_2 = 1 + 1 = 2$

$(-1; -2) \notin$ ОДЗ, так как $-1 + (-2) < 0$.

$(2; 1)$ является решением системы уравнений, так как удовлетворяет всем условиям ОДЗ.

Ответ: $(2; 1)$.

№4. Вычислите: $\int\limits_0^1 \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x}\,dx$

Решение

$$\int\limits_0^1 \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{(3-2x)(3+2x)}{3-2x}+\frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3+2x+\frac{1}{\sqrt{3-2x}}\right)dx = \left(3x+2\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3-2x}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(3\cdot 1+1^2-\sqrt{3-2\cdot 1}\right)-\left(3\cdot 0+0^2-\sqrt{3-2\cdot 0}\right) = 3+1-1+\sqrt{3} =$$

$$= 3+\sqrt{3}$$

Ответ: $3+\sqrt{3}$.

№5. Представьте число 12 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение:

Пусть x – одно слагаемое, тогда $(12-x)$ – другое слагаемое.

По условию задачи составим функцию

$f(x) = x^2+(12-x)^2$

$f(x) = x^2+144-24x+x^2$

$f(x) = 2x^2 - 24x + 144.$

Исследуем функцию на наименьшее значение с помощью производной.

$f'(x) = 4x - 24.$

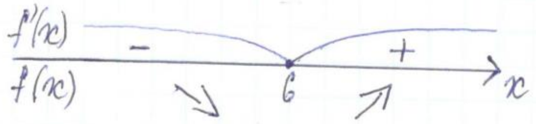
Найдем критические точки функции, для этого решим уравнение $f'(x) = 0$

$4x - 24 = 0$

$4x = 24$

$x = 6.$

Определим знак производной



$x_{min} = 6 \Rightarrow f(6)$ - наименьшее значение функции.

$x = 6 \Rightarrow 12 - x = 12 - 6 = 6.$

Значит, одно слагаемое равно 6, а другое слагаемое тоже равно 6.

Ответ: $12 = 6 + 6.$

№6. Исследуйте функцию и постройте график: $f(x)=x^2(x-2)^2$.

Решение:

$f(x)=x^2(x-2)^2$

1. $D(y)=R$; $E(y)=[0;+\infty)$
2. Чётность, нечётность функции.

$f(-x)=(-x)^2(-x-2)^2=x^2(x+2)^2$

$f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, следовательно данная функция общего вида.

3. Точки пересечения с осями координат.

с Ox: $y=0 \Rightarrow x^2(x-2)^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x-2)^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

$O(0;0)$, $A(2;0)$

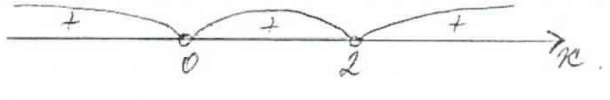
с Oy: $x=0 \Rightarrow y=0^2\cdot(0-2)^2=0\cdot 4=0$

$O(0;0)$

4. Промежутки знакопостоянства

$f(x)>0$ $\quad$ $f(x)<0$

$x^2(x-2)^2>0$ $\quad$ $x^2(x-2)^2<0$.



$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

5. Найдем производную функции.

$f'(x) = 2x(x-2)^2 + x^2 \cdot 2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x) =$

$= 2x(x-2)(2x-2) = 4x(x-2)(x-1)$.

6. Найдем критические точки функции.

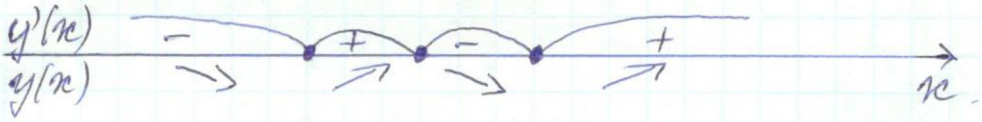
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2)(x-1) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

7. Найдем промежутки возрастания и убывания функция, точки экстремума.

Для этого решим неравенства:

$4x(x-2)(x-1) \geq 0$ и $4x(x-2)(x-1) \leq 0$.



$f(x)$ возрастает при $x \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$

$f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2]$

$x_{min} = 0,\ y_{min} = y(0) = 0^2 \cdot (0-2)^2 = 0$

$x_{min} = 2,\ y_{min} = y(2) = 2^2 \cdot (2-2)^2 = 0$

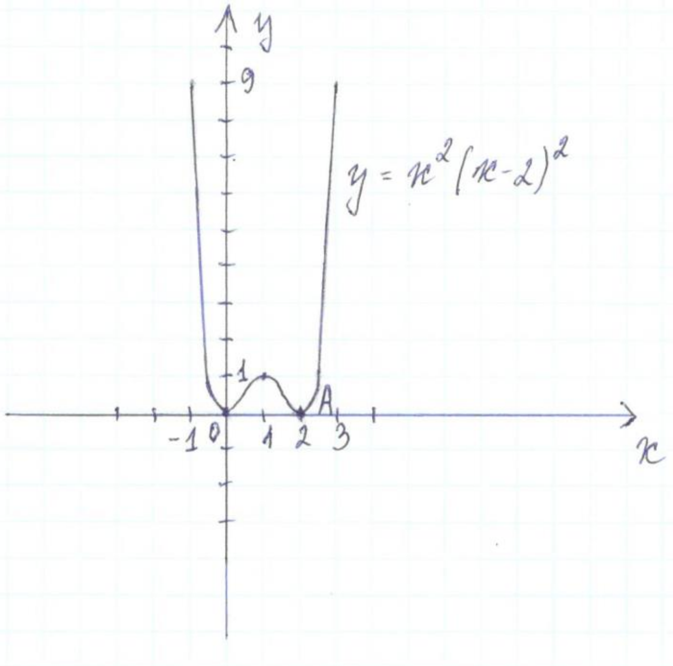
$x_{max} = 1,\ y_{max} = y(1) = 1^2 \cdot (1-2)^2 = 1$

8. Дополнительные точки

$y = f(3) = 3^2 \cdot (3-2)^2 = 9 \cdot 1 = 9.$

$y = f(-1) = (-1)^2 \cdot (-1-2)^2 = 1 \cdot 9 = 9.$

9. Строим график.



Примерные контрольные работы для самостоятельного решения

Общественно-гуманитарное направление

1 - вариант

1.Вычислите: $4^{2+\log_4 2}$

2.Упростите: $\dfrac{n^2 - m^2}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{m}\right)^2 - 2\sqrt{mn}}$

3.Решите неравенство: $2\cos 2x - 1 \ge 0$

4.Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 5^{y+2} = 9 \\ 2x - 5^{y+3} = 11 \end{cases}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:
$y = 3 - 4x + x^2 \quad и \quad y = 3 - x^2$.

2 - вариант

1.Вычислите: $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{8}{\sqrt{5+4x}} dx$

2. Упростите: $b^{\sqrt{5}} \cdot b^{1,4} : \sqrt[4]{b^{4\sqrt{5}}}$

3. Решите уравнение: $\sin\left(15^\circ + x\right) + \sin\left(45^\circ - x\right) = 1$.

4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 5 - x \ge 0 \\ \log_6 (x+3) \ge 1 \end{cases}$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции
$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x + 10$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

Естественно-математическое направление

1- вариант

1. Найдите значение выражения: $\sqrt{43-30\sqrt{2}}-\sqrt{43+30\sqrt{2}}$
2. Если $log_7 3=a$ и $log_7 2=b$ то выразите $log_7 378$ через a и b
3. Решите уравнение: $6cos^2 x+sin\,x-5=0$
4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} log_{2,1}\left(x^2+2x-10\right)\geq log_{2,1}(x+2) \\ |x|<7 \end{cases}$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=8-x^3$ на отрезке [–1;2]
6. Найдите площадь плоской фигуры ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x+2}+2$ и прямой, проходящих через точки с координатами (−2;2); (2;4)

2 – вариант

1. Найдите значение выражения: $\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$
2. Если $log_7 3=a$ и $log_7 2=b$ то выразите $log_7 588$ через a и b
3. Решите уравнение: $6sin^2 x-cos\,x-5=0$
4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} log_{\frac{1}{7}}\left(x^2-2x-9\right)\leq log_{\frac{1}{7}}(x+1) \\ |x|\leq 6 \end{cases}$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^3-1$ отрезке [–2;1]
6. Найдите площадь плоской фигуры ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x+1}+2$ и прямой, проходящих через точки с координатами (−1;2); (0;3)

Углубленное изучение математики

1 – вариант

1. Вычислите: $3^{\log_{\frac{1}{2}} 0{,}04} + \log_{25}(3+2\sqrt{2}) - \log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{2}-1)$

2. Упростить выражение: $2ctg\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{2\sin(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+tg(-\alpha)}$

3. Решите уравнение: $4^{2x^2-3x+3} = 24-12+6-3+\ldots$

4. Решите неравенство: $\log_x \frac{2x+5}{4x-4} < 0$

5. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{3}$. При какой высоте призмы объем её будет наибольшим?

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 4x + 4$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

2 – вариант

1.Вычислите: $\left(\frac{1}{4}\right)^{9\log_8 \frac{2-\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4\log_{2\sqrt[3]{2}}(5+3\sqrt{5})}$

2. Упростите выражение: $\cos(-2\alpha)+\dfrac{2\sin(\pi-2\alpha)}{ctg\,\alpha+ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

3.Решите уравнение: $3^{2x^2-5x+6}=18+6+2+\dfrac{2}{3}+\ldots$

4. Решите неравенство: $\log_x \dfrac{3x+2}{4-4x}>0$

5.Длина бокового ребра правильной четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Высота пирамиды может принимать только те значения, которые принадлежат отрезку [1;5]. Найдите наибольший объём пирамиды.

6.Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+6x+9$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

Содержание